

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. D 2. B 3. C 4. A 5. A

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $1-p$ 2. $\frac{1}{9}$ 3. 25.6 4. $N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{4}\right)$ 5. $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$

三、（6 分）某加油站的顾客中，40%使用 92 号汽油，35%使用 95 号汽油，25%使用 98 号汽油。用 92 号汽油的人有 30%加满，用 95 号汽油的人有 60%加满，用 98 号汽油的人有 50%加满，求（1）随便挑一人，油箱加满的概率；（2）已知某人油箱加满，他使用 95 号汽油的概率。

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示加 92 号, 95 号, 98 号汽油， B 表示“加满”，-----1 分

（1）全概率公式 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.455$ -----4 分

（2）贝叶斯公式 $P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} \approx 0.462$.-----6 分

四、（10 分）设随机变量 X 的概率密度为：
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1 < x < 8 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
，求（1）分

布函数 $F(x)$ ；（2） $P\{0 < X < 8\}$ （3） $Y = 3 - X$ ，求其概率密度 $f_Y(y)$ 。

解：（1）
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt, & 1 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x^{\frac{1}{3}} - 1, & 1 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$$
 -----3 分

（2） $P\{0 < X < 8\} = \int_1^8 \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$ -----5 分

$= 8^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}} = 1$ -----6 分

（3）
$$f_Y(y) = f_X(3-y) \cdot |-1| = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(3-y)^2}}, & 1 < 3-y < 8 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(3-y)^2}}, & -5 < y < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
 -----10 分

五、(10 分) 已知总体 X 的概率密度函数为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1}, & x > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ (其中参数 $\theta > 1$)

x_1, x_2, \dots, x_n 为总体 X 的 n 个样本值, 求参数 θ 的矩估计量及最大似然估计值。

解: (1) $\mu_1 = E(X) = \int_1^{+\infty} x \theta x^{-\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta-1}$ -----2 分

令 $\mu_1 = A_1$, 则 $\bar{X} = \frac{\theta}{\theta-1}$, 解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ -----4 分

(2) 似然函数为 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta x_i^{-\theta-1}) = \theta^n (\prod_{i=1}^n x_i)^{-\theta-1}$ -----6 分

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$
 -----8 分

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$
 -----10 分

六、(第 1 题 6 分, 第 2 题 8 分共 14 分)

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 则统计量

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2}$$
 服从什么分布?

解: X_i 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, 所以 X_i 相互独立且服从 $N(0,1)$ -----2 分

X_1^2 服从 $\chi^2(1)$, $\sum_{i=2}^n X_i^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$ 且两者相互独立 -----4 分

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} = \frac{X_1^2 / 1}{\frac{\sum_{i=2}^n X_i^2}{n-1}}$$
 服从 $F(1, n-1)$ -----6 分

2. 设随机变量 X 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求: (1) 常数 θ ; (2) $E(e^{X^3})$;

(3) $D(X)$ 。

解: (1) $\int_0^2 \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \frac{8}{\theta^3} = 1$ -----1 分

$\theta = 2$ -----2 分

(2) $E(e^{X^3}) = \int_0^2 e^{x^3} \frac{3x^2}{8} dx$ -----4 分

$= \frac{e^8 - 1}{8}$ -----5 分

(3) $E(X) = \int_0^2 x \frac{3x^2}{8} dx = \frac{3}{2}$ -----6 分

$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{3x^2}{8} dx = \frac{12}{5}$ -----7 分

$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{20}$ -----8 分

七、(12 分) 设 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求: (1) X 和 Y 的边缘概率密度; (2) $P\{X > 2Y\}$; (3) 判断 X 和 Y 的独立性。

解: (1) 当 $0 < y < 1$ 时, Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx = -9y^2 \ln y$;

当 $y \leq 0$ 或 $y \geq 1$ 时, $f_Y(y) = 0$. -----3 分

X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ -----6 分

(2) $P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy = \frac{1}{8}$ -----9 分

(3) $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不独立. -----12 分

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 某食品加工厂生产一种盒装奶油蛋糕, 为检验产品的重量是否符合要求, 现

从某个批次的盒装奶油蛋糕中随机抽取了16盒，测得重量的 $\bar{x} = 426.1$ ， $s^2 = 16$ ，假设盒装奶油蛋糕的重量服从正态分布，给定显著性水平 $\alpha = 0.05$ ，若厂家规定盒装奶油蛋糕的标准重量为428g，试问这批盒装奶油蛋糕是否符合生产标准？

解：提出假设： $H_0: \mu = 428 = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ -----1分

选取检验统计量： $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ -----2分

拒绝域为： $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ -----3分

代入数值得： $|t| = \left| \frac{426.1 - 428}{4/4} \right| = 1.9 < t_{0.025}(15) = 2.1315$ -----5分

故接受 H_0 ，认为这批盒装奶油蛋糕符合生产标准。 -----6分

2. 设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，求：

$Z = X + Y$ 的概率密度。

解： $f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$ -----2分

$$= \begin{cases} \int_0^z 12e^{-3x} e^{-4(z-x)} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \text{ -----4分}$$

$$= \begin{cases} 12e^{-4z}(e^z - 1), & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \text{ -----6分}$$

九、（6分）据统计：65岁的人在30年内正常死亡的概率为0.98，因意外死亡的概率为0.02。保险公司开办老人意外事故死亡保险，参保者仅需交纳保险费1000元。若30年内因意外事故死亡，公司赔偿 a 元。问：(1) 如何确定赔偿额度 a ，才能使保险公司期望获得收益？(2) 若有10000人投保，公司期望总获收益是多

少?

解： 设 X_i 表示公司从第 i 个投保人处获得的收益， $i=1,2,\dots,10000$ ， 则 X_i 的分布律为

X_i	1000	1000-a
P	0.98	0.02

-----2 分

(1) 由于公司不能亏本， 故应有

$$E(X_i)=1000\times 0.98+(1000-a)\times 0.02=1000-0.02a>0 \quad \text{-----3 分}$$

从而得到赔偿额度满足 $1000<a<50000$ -----4 分

(2) 公司总收益为

$$E\left(\sum_{i=1}^{10000} X_i\right)=\sum_{i=1}^{10000} E(X_i) \quad \text{-----5 分}$$

$$=1\times 10^7-200a \quad \text{-----6 分}$$