

参考数据:  $z_{0.025} = 1.96$ ,  $z_{0.05} = 1.645$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ ,  $t_{0.05}(16) = 1.7459$ ,  $\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$ ,  
 $\chi^2_{0.025}(16) = 28.845$ ,  $\chi^2_{0.975}(16) = 6.908$ ,  $t_{0.025}(15) = 2.1315$ ,  $t_{0.025}(16) = 2.1199$

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

- 若两个事件  $A, B$  相容, 则有 ( )。
 

A.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$       B.  $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$   
 C.  $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) + P(\bar{B})$       D.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{8}}$ , 则  $X \sim$  ( )。
 

A.  $N(-2, 2)$       B.  $N(-2, 4)$       C.  $N(-2, 8)$       D.  $N(-2, 16)$
- 设  $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$  及  $\text{Cov}(X, Y)$  均存在, 则  $D(X-Y) =$  ( )。
 

A.  $D(X)+D(Y)$       B.  $D(X)-D(Y)$       C.  $D(X)+D(Y)-2\text{Cov}(X, Y)$       D.  $D(X)-D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
- 设总体  $X \sim N(\mu, 1)$ , 其中  $\mu$  为未知参数,  $X_1, X_2, X_3$  为取自该总体的样本, 下面四个关于  $\mu$  的无偏估计中, 采用有效性这一标准来衡量, 最好的一个是 ( )。
 

A.  $\hat{\mu} = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$       B.  $\hat{\mu} = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$       C.  $\hat{\mu} = \frac{1}{6}X_1 + \frac{5}{6}X_2$       D.  $\hat{\mu} = \frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3$
- 在假设检验中, 显著性水平  $\alpha$  表示 ( )。
 

A. 原假设为真时, 被拒绝的概率      B. 原假设为假时, 被接受的概率  
 C. 原假设为真时, 被接受的概率      D. 原假设为假时, 被拒绝的概率

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

- 设  $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$ , 且  $P(A) = p$ , 求  $P(B) =$  \_\_\_\_\_。
- 设随机变量  $X$  的数学期望  $E(X) = \mu$ , 方差  $D(X) = \sigma^2$ , 根据切比雪夫不等式  $P\{|X - \mu| > 3\sigma\} \leq$  \_\_\_\_\_。
- 已知  $D(X) = 4, D(Y) = 1, \rho_{XY} = 0.6$ , 则  $D(3X - 2Y) =$  \_\_\_\_\_。
- 设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 设  $Z = \frac{X+Y}{2}$ , 则  $Z \sim$  \_\_\_\_\_。
- 由来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  且容量为  $n$  的简单随机样本, 计算得样本均值为  $\bar{x}$ , 则当  $\sigma$  已知时, 未知参数  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间是 \_\_\_\_\_。

三、(6分) 某加油站的顾客中, 40%使用 92 号汽油, 35%使用 95 号汽油, 25%使用 98 号汽油。用 92 号汽油的人有 30%加满, 用 95 号汽油的人有 60%加满, 用 98 号汽油的人有 50%加满, 求 (1) 随便挑一人, 油箱加满的概率; (2) 已知某人油箱加满, 他使用 95 号汽油的概率。

四、(10分) 设随机变量  $X$  的概率密度为:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1 < x < 8 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求 (1) 分布

函数  $F(x)$ ; (2)  $P\{0 < X < 8\}$ ; (3)  $Y = 3 - X$ , 求其概率密度  $f_Y(y)$ 。

五、(10分) 已知总体  $X$  的概率密度函数为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1}, & x > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  (其中参数  $\theta > 1$ )

$x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体  $X$  的  $n$  个样本值, 求参数  $\theta$  的矩估计量及最大似然估计值。

六、(第 1 题 6 分, 第 2 题 8 分共 14 分)

1. 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(0,1)$  的简单随机样本, 则统计量

$$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \text{ 服从什么分布?}$$

2. 设随机变量  $X$  的概率密度为:  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求: (1) 常数  $\theta$ ; (2)  $E(e^{x^3})$ ;

(3)  $D(X)$ 。

七、(12分) 设  $(X, Y)$  的概率密度  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 求: (1)

$X$  和  $Y$  的边缘概率密度; (2)  $P\{X > 2Y\}$ ; (3) 判断  $X$  和  $Y$  的独立性。

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 某食品加工厂生产一种盒装奶油蛋糕, 为检验产品的重量是否符合要求, 现从某个批次的奶油蛋糕中随机抽取了 16 盒, 测得重量的  $\bar{x} = 426.1$ ,  $s^2 = 16$ , 假设盒装奶油蛋糕的重量服从正态分布, 给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 若厂家规定每个包装盒的标准重量为 428g, 试问这批盒装奶油蛋糕是否符合生产标准?

2. 设随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求:

$Z = X + Y$  的概率密度。

九、(6分) 据统计: 65 岁的人在 30 年内正常死亡的概率为 0.98, 因意外死亡的概率为 0.02。

保险公司开办老人意外事故死亡保险，参保者仅需交纳保险费 1000 元。若 30 年内因意外事故死亡，公司赔偿  $a$  元。问：(1) 如何确定赔偿额度  $a$ ，才能使保险公司期望获得收益？(2) 若有 10000 人投保，公司期望总获收益是多少？