

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1.A 2.B 3.B 4.C 5.D

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 0.5 2. 0.5 3. 0.25 4. 0.1 5. $(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$

三、（8 分）有朋友自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3、0.2、0.1、0.4，如果乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{12}$ ，而乘飞机则不会迟到，问他迟到的概率是多少？如果他确实迟到了，那他乘火车来的概率是多少？

解：设 B_1, B_2, B_3, B_4 分别表示乘火车，轮船，汽车，飞机到来， A 表示迟到，

$$\begin{aligned} \text{则由全概率公式可得迟到概率 } P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i) \\ &= \frac{1}{4} \times 0.3 + \frac{1}{3} \times 0.2 + \frac{1}{12} \times 0.1 + 0 \times 0.4 = 0.15 \end{aligned}$$

由贝叶斯公式可得迟到情况下乘火车来的概率

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \times 0.3}{0.15} = 0.5 \end{aligned}$$

四、（9 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求（1）常数 a ；

（2） X 的分布函数 $F(x)$ ； （3） $P\{1 < X < 3\}$ 。

$$\text{解：（1） } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 (ax+1)dx = \left(\frac{a}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^2 = 2a + 2$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

（2） X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x (1 - \frac{u}{2})du, & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(3) P\{1 < X < 3\} = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 (1 - \frac{x}{2})dx = \frac{1}{4}.$$

五、（9 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(x-5)^\theta, & 5 < x < 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (θ 为未知参数),

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的容量为 n 样本, 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

$$\text{解: } E(X) = \int_5^6 x(\theta+1)(x-5)^\theta dx = \int_5^6 x d(x-5)^{\theta+1}$$

$$= 6 - \int_5^6 (x-5)^{\theta+1} dx = 6 - \frac{1}{\theta+2}$$

$$\text{令 } E(X) = \bar{X} \text{ -----2 分}$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = \frac{1}{6 - \bar{X}} - 2 = \frac{2\bar{X} - 11}{6 - \bar{X}}$$

$$\text{似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n (x_i - 5)^\theta,$$

$$\ln L(\theta) = n \ln(1 + \theta) + \theta \sum_{i=1}^n \ln(x_i - 5)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1 + \theta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i - 5) = 0$$

$$\theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i - 5)} - 1$$

六、（每题 7 分，共 14 分）

1. 设随机变量 X 服从区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度函数。

解：随机变量 X 的概率密度函数为：
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$y = e^x, x = \ln y, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, 代入公式得：

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\ln y) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2|y|}, & -1 < \ln y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2y}, & e^{-1} < y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求：(1) $E(X)$; (2)

$D(X)$ 。

解：

$$(1) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx = 1$$

$$(2) E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{7}{6},$$

$$\text{故： } D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

七、(12分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为：

$$f(x, y) = \begin{cases} Axe^{-y}, & 0 \leq x \leq 2, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 求：(1) 常数 } A; (2) \text{ 求 } X, Y \text{ 的边缘概率密度,}$$

并判断 X, Y 是否相互独立; (3) 判断 X, Y 是否相关。

$$\text{解：(1) } \int_0^2 dx \int_0^{+\infty} Axe^{-y} dy = 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2};$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-y} dy, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^2 \frac{x}{2} e^{-y} dx, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

由 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 知, X 与 Y 相互独立;

(3) X 与 Y 相互独立, 故 X 与 Y 不相关;

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 车辆厂生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从中抽取 5 只, 测得直径 (单位: 毫米) $\bar{x} = 21.8$, $S^2 = 0.135$, 如果 σ^2 未知, 试问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 直径均值 $\mu = 21$ 是否成立?

解: $H_0: \mu = 21$; $H_1: \mu \neq 21$,

$$H_0 \text{ 成立时, 检验统计量 } t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\bar{x} = 21.8, \quad S^2 = 0.135,$$

$$t = \frac{21.8 - 21}{\sqrt{0.135/5}} = 4.87,$$

$$\text{由于 } t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.776, \quad |t| = 4.87 > 2.776 = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

故拒绝 H_0 , 即螺杆直径均值不是 21.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为: $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求

$Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

$$\text{解: } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z e^{-(x+z-x)} dx, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ze^{-z} & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

九、(6 分) 工程队完成某项工程的时间 $X \sim N(100, 16)$ (单位: 天)。甲方规定: 若该工程在 100 天内完成, 发奖金 10000 元; 若在 100 天至 112 天内完成, 只发奖金 1000 元; 若完工时间超过 112 天, 则罚款 5000 元。求该工程队完成此项工程时获奖金的数学期望。

解: 得奖金 10000 元的概率为

$$P\{0 < X \leq 100\} = \Phi\left(\frac{100-100}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-100}{4}\right) \approx 0.5$$

得奖金 1000 元的概率为

$$P\{100 < X \leq 112\} = \Phi\left(\frac{112-100}{4}\right) - \Phi\left(\frac{100-100}{4}\right) = 0.4987$$

被罚款 5000 元的概率为

$$P\{X > 112\} = 1 - \Phi\left(\frac{112-100}{4}\right) = 0.0013$$

故工程队获得奖金的数学期望为

$$E(X) = 10000 \times 0.5 + 1000 \times 0.4987 - 5000 \times 0.0013 \approx 5492.2(\text{元})$$