

参考数据: $z_{0.025} = 1.96$, $z_{0.05} = 1.645$, $t_{0.05}(4) = 2.1318$, $t_{0.05}(5) = 2.0150$,
 $t_{0.025}(4) = 2.776$, $t_{0.025}(5) = 2.5706$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$,
 $\Phi(3) = 0.9987$

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A 与 B 是任意两个互不相容事件, 则下列结论中正确的是 ()。
 A. $P(A-B)=P(A)$ B. $P(A-B)=P(B)$ C. $P(AB)=P(A)P(B)$ D. $P(A)=1-P(B)$
2. 下列结论中错误的是 ()。
 A. 若 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) = np$ B. 若 $X \sim U(-1, 1)$, 则 $D(X) = 0$
 C. 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X) = D(X)$ D. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
3. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则 ()。
 A. p 随着 μ 的增加而增加 B. p 随着 σ 的增加而增加
 C. p 随着 μ 的增加而减少 D. p 随着 σ 的增加而减少
4. 样本 X_1, X_2, X_3, X_4 取自正态分布总体 X , $E(X) = a$ 已知, 而 $D(X) = \sigma^2$ 未知, 则下列随机变量中不能作为统计量的是 ()。
 A. $\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i$ B. $h = X_1 + X_2 - 2a$ C. $k = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2$ D.
 $S^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2$
5. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 2$) 为来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, S^2 为样本方差, 则下列选项正确的是 ()。

A. $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ B. $nS^2 \sim \chi^2(n)$ C. $n\bar{X} \sim N(0, 1)$ D.

$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$, $P(B|A) = 0.25$, 则 $P(A|B) =$ _____。
2. 设两个相互独立的随机变量 X, Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$,

$P\{X+Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \mu$ ，方差 $D(X) = 1$ ，则由切比雪夫不等式，有

$P\{|X - \mu| \geq 2\} \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布律如右图所示，则 X, Y 的协方差 $\text{Cov}(X, Y)$
 $= \underline{\hspace{2cm}}.$

| $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ | 1 | 2 |
|--------------------------------------|-----|-----|
| 0 | 0.4 | 0.1 |
| 1 | 0.2 | 0.3 |

5. 某车间生产滚珠，从长期实践知道，滚珠直径 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，从某天产品里随机抽取 n 个，经计算其样本均值 \bar{x} ，则当 σ 已知时，总体均值 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、(8 分) 有朋友自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3、0.2、0.1、0.4，如果乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{12}$ ，而乘飞机则不会迟到，问他迟到的概率是多少？如果他确实迟到了，那他乘火车来的概率是多少？

四、(9 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ax+1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求 (1) 常数 a ；(2) X 的分布函数 $F(x)$ ；(3) $P\{1 < X < 3\}$ 。

五、(9 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(x-5)^{\theta}, & 5 < x < 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ (θ 为未知

参数)， X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的容量为 n 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

六、(每题 7 分，共 14 分)

1. 设随机变量 X 服从区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布，求随机变量 $Y = e^X$ 的概率密度函数。

2. 设随机变量 X 的概率密度为： $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，求：(1) $E(X)$ ；(2)

$D(X)$ 。

七、(12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为：

$$f(x, y) = \begin{cases} Axe^{-y}, & 0 \leq x \leq 2, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{求: (1) 常数 } A; (2) \text{ 求 } X, Y \text{ 的边缘概率密度, 并}$$

判断 X, Y 是否相互独立; (3) 判断 X, Y 是否相关。

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 车辆厂生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 现从中抽取 5 只, 测得直径 (单位: 毫米), $\bar{x} = 21.8$, $s^2 = 0.135$, 如果 σ^2 未知, 试问在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下, 直径均值 $\mu = 21$ 是否成立?

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为: $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求

$Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

九、(6 分) 工程队完成某项工程的时间 $X \sim N(100, 16)$ (单位: 天)。甲方规定: 若该工程在 100 天内完成, 发奖金 10000 元; 若在 100 天至 112 天内完成, 只发奖金 1000 元; 若完工时间超过 112 天, 则罚款 5000 元。求该工程队完成此项工程时获奖金的数学期望。