

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. D 2. A 3. D 4. C 5. B

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 0.25 2. $N(7,16)$ 3. 0.25 4. 13 5. $N(2, \frac{1}{4})$

三、（10 分）有两个口袋，甲袋中盛有 2 个白球，1 个黑球，乙袋中盛有 1 个白球，2 个黑球，由甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球，求取到白球的概率。

解：设 A 表示从乙袋中取出的是白球， B 表示从甲袋中取出的是白球。由全概率公式

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

四、（9 分）设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 试求：

（1）系数 A ；（2） $P\{\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\}$ ；（3） X 的分布函数 $F(x)$ 。

解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \sin x dx = A = 1$, 得 $A = 1$

$$\text{(2)} \quad P\{\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\text{(3)} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \sin x dx = 1 - \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

五、（9 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 其中 θ ($0 < \theta < 1$) 是未知参数。

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的简单随机样本，记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数。求：（1） θ 的矩估计量；（2） θ 的极大似然估计值。

解：（1） $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x\theta dx + \int_1^2 x(1-\theta)dx = \frac{3}{2} - \theta$, $A_1 = \bar{X}$

令 $\mu_1 = A_1$, 则 $\bar{X} = \frac{3}{2} - \theta$, 解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$

(2) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N}$

取对数得对数似然函数 $\ln L = N \ln \theta + (n-N) \ln(1-\theta)$

求导 $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{N}{\theta} + \frac{n-N}{\theta-1} = 0$

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$

六、（每题 6 分，共 12 分）

1. 已知随机变量 X 服从区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布，试求 $Y = e^X$ 的概率密度。

解： X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$

$y = e^x$ 的反函数 $x = h(y) = \ln y$ ，且 $h'(y) = \frac{1}{y}$ 。

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) |h'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}, & -1 < \ln y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & e^{-1} < y < e, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

2. 一家粮油公司大米包装生产线封装的袋米重量 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 。从生产线抽取 10 袋大米，测得袋米的重量样本标准差 $s = 0.24$ （千克）。求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间。

解：由于 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，所以 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$

由 $1-\alpha = 95\%$ ，得 $\alpha = 0.05$ 。再由 $n = 9$ ，查表得 $\chi_{0.025}^2(9) = 19.023, \chi_{0.975}^2(9) = 2.70$

代入得所求置信区间为 $(0.028, 0.194)$

七、（12 分）设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ 求：（1） X

与 Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$ ；（2）判断 X 与 Y 是否相互独立？（3） $E(X), D(X)$ ；（4） $\text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 。

解：（1） $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \frac{x+y}{8} dy = \frac{x+1}{4}, & x \in [0, 2], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^2 \frac{x+y}{8} dx = \frac{y+1}{4}, & y \in [0, 2], \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立。

$$(3) E(X) = \int_0^2 dx \int_0^2 x \cdot \frac{x+y}{8} dy = \frac{7}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^2 dx \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x+y}{8} dy - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36}$$

$$(4) \text{ 由 } X, Y \text{ 同分布, 得 } E(Y) = E(X) = \frac{7}{6}, D(Y) = D(X) = \frac{11}{36}$$

$$E(XY) = \int_0^2 dx \int_0^2 xy \cdot \frac{x+y}{8} dy = \frac{4}{3}, \text{ Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{11}$$

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 某糖厂用自动包装机装糖。已知每袋的重量(单位: 千克)服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。随机抽查 9 袋, 并称出它们的重量 x_1, \dots, x_9 , 由此算得 $\bar{x} = 48.5, s = 2.5$ 。试在 $\alpha = 0.05$ 条件下检验 $H_0: \mu = 50 (H_1: \mu \neq 50)$ 。

$$\text{解: } H_0 \text{ 成立时, } T = \frac{\bar{X} - 50}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\text{临界值 } t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306, \text{ 拒绝域 } |t| > 2.306$$

$$\text{因为 } |t| = \frac{|\bar{x} - 50|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|48.5 - 50|}{2.5/\sqrt{9}} = 1.8 < 2.306$$

所以接受 H_0 。

$$2. \text{ 设 } X, Y \text{ 服从指数分布, 且 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \\ &= \begin{cases} \int_0^z e^{-x} \cdot 2e^{-2(z-x)} dx, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2e^{-2z}(e^z - 1), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

九、（6 分）某保险公司制定赔偿方案：如果在一年内顾客的投保事件 A 发生，该公司就赔偿顾客 a 元。若已知一年内事件 A 发生的概率为 p ，为使公司收益的期望值等于 a 的 5%，该公司应该要求顾客交纳多少元保险费？

解：设顾客交纳 x 元保险费，公司收益用 Y 表示，则有 $Y = \begin{cases} x, & A \text{ 不发生,} \\ x - a, & A \text{ 发生.} \end{cases}$

据题意， $P\{Y = x\} = P(\bar{A}) = 1 - p$ ， $P\{Y = x - a\} = P(A) = p$ ，

从而 $E(Y) = x(1 - p) + (x - a)p = x - ap$ 。

又知 $E(Y) = a \cdot 5\%$ ，故 $x = a(p + 5\%)$ 。