

参考数据: $z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645, t_{0.05}(8) = 1.8595, t_{0.05}(9) = 1.8331, \chi_{0.05}^2(8) = 15.507,$

$\chi_{0.025}^2(9) = 19.023, \chi_{0.975}^2(9) = 2.70, t_{0.025}(8) = 2.306, t_{0.025}(9) = 2.2622$

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设随机事件 A, B 满足 $P(A|B)=1$, 则下列结论正确的是 ()。
(A) A 是必然事件 (B) B 是必然事件 (C) $AB = B$ (D) $P(AB) = P(B)$
2. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则下式中成立的是 ()。
(A) $\sigma_1 < \sigma_2$ (B) $\sigma_1 > \sigma_2$ (C) $\mu_1 < \mu_2$ (D) $\mu_1 > \mu_2$
3. 设 (X, Y) 服从二元正态分布, 则下列结论中错误的是 ()。
(A) (X, Y) 的边缘分布仍然是正态分布。
(B) X 与 Y 相互独立等价于 X 与 Y 不相关。
(C) (X, Y) 的分布函数唯一确定边缘分布函数。
(D) 由 (X, Y) 的边缘概率密度可以完全确定 (X, Y) 的概率密度。
4. 对于置信水平 $1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), 关于置信区间的可靠程度与精确程度, 下列说法不正确的是 ()。
(A) 若可靠程度越高, 则置信区间包含未知参数真值的可能性越大。
(B) 如果 α 越小, 则可靠程度越高, 精确程度越低。
(C) 如果 $1 - \alpha$ 越小, 则可靠程度越高, 精确程度越低。
(D) 若精确程度越高, 则可靠程度越低, 而 $1 - \alpha$ 越小。
5. 假设检验时, 若增大样本容量, 则犯两类错误的概率 ()。
(A) 都增大 (B) 都减小 (C) 都不变 (D) 一个增大, 一个减小

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设三事件 A, B 和 C 两两独立, 满足条件: $ABC = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$, 且 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 则 $P(A) =$ _____。
2. 设 $X \sim N(2, 4), Z = 2X + 3$, 则 $Z \sim$ _____。
3. 设 $X \sim B(n, p)$, 其方差与数学期望之比为 $3:4$, 则该分布的参数 p 等于 _____。
4. 已知 X, Y 独立, $E(X) = E(Y) = 2$, $E(X^2) = E(Y^2) = 5$, 则 $D(3X - 2Y + 6) =$ _____。
5. 设总体 $X \sim N(2, 25)$, X_1, X_2, \dots, X_{100} 是从该总体中抽取的容量为 100 的样本, 则统计量 $\bar{X} \sim$ _____。

三、(10 分) 有两个口袋, 甲袋中盛有 2 个白球, 1 个黑球, 乙袋中盛有 1 个白球, 2 个黑球, 由甲袋中任取一个球放入乙袋, 再从乙袋中取出一个球, 求取到白球的概率。

四、(9 分) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 试求:

(1) 系数 A ; (2) $P\{\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\}$; (3) X 的分布函数 $F(x)$ 。

五、(9 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 其中 θ ($0 < \theta < 1$) 是未知

参数。 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数。求: (1) θ 的矩估计量; (2) θ 的极大似然估计值。

六、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 已知随机变量 X 服从区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布, 试求 $Y = e^X$ 的概率密度。

2. 一家粮油公司大米包装生产线封装的袋米重量 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 。从生产线抽取 10 袋大米, 测得袋米的重量的样本标准差 $s = 0.24$ (千克)。求 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间。

七、(12 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求:

(1) X 与 Y 的边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$; (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立? (3)

$E(X), D(X)$; (4) $\text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 。

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 某糖厂用自动打包机装糖。已知每袋的重量 (单位: 千克) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。随机抽查 9 袋, 并称出它们的重量 x_1, \dots, x_9 , 由此算得 $\bar{x} = 48.5, s = 2.5$ 。试在 $\alpha = 0.05$ 条件下检验 $H_0: \mu = 50$ ($H_1: \mu \neq 50$)。

2. 设 X, Y 服从指数分布, 且 X 与 Y 相互独立, $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$ 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

九、(6 分) 某保险公司制定赔偿方案: 如果在一年内顾客的投保事件 A 发生, 该公司就赔偿顾客 a 元。若已知一年内事件 A 发生的概率为 p , 为使公司收益的期望值等于 a 的

5%, 该公司应该要求顾客交纳多少元保险费?