

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. B 2. A 3. D 4. A 5. B

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 0.1 2. $N(-2,1)$ 3. 0.4 4. 63 5. $F(n,1)$

三、（10 分）某年级有甲、乙、丙三个班级，各班的人数分别占年级总人数的 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ ，且个班里集邮的人数分别占该班人数的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ 。试求：（1）从该年级随机选取一名学生，则此人为集邮者的概率。（2）从该年级随机选取一名学生，若发现此人是集邮者，则此人是甲班的概率。

解：（1）设 A_1, A_2, A_3 分别表示随机选取的一名学生是甲、乙、丙班的，

B = “随机选取的一名学生是集邮者”。

$$\begin{aligned} \text{由全概率公式有 } P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) \quad \text{-----2 分} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{5} \quad \text{-----5 分} \\ &= \frac{7}{24} \quad \text{-----6 分} \end{aligned}$$

$$\text{（2）由贝叶斯公式有 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7} \quad \text{-----10 分}$$

四、（9 分）设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$ 试求：

（1）系数 k ；（2） $P\{|X| < \frac{1}{2}\}$ ；（3） X 的分布函数 $F(x)$ 。

$$\text{解：（1）} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi k = 1, \text{ 得 } k = \frac{1}{\pi} \quad \text{-----2 分}$$

$$\text{（2）} P\{|X| < \frac{1}{2}\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2} \quad \text{-----5 分}$$

$$\text{（3）} F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \int_{-1}^x \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad \text{-----9 分}$$

五、（9 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，其中 $\theta > -1$ 是未知参数，

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

解: $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$, $A_1 = \bar{X}$, -----1 分

令 $\mu_1 = A_1$, 则 $\bar{X} = \frac{\theta+1}{\theta+2}$, 解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ 。-----3 分

似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^\theta = (\theta+1)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^\theta$, $0 < x_i < 1$ -----5 分

取对数得对数似然函数 $\ln L = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$

求导 $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0$ -----7 分

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{n - \sum_{i=1}^n \ln x_i}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ -----8 分

从而 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{n - \sum_{i=1}^n \ln X_i}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ -----9 分

六、（每题 6 分，共 12 分）

1. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x \ln 2}, & 1 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 且 $Y = 2 - X$, 试求 Y 的概率密度。

解: $y = 2 - x$ 的反函数 $x = h(y) = 2 - y$, 且 $h'(y) = -1$ 。-----2 分

$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{2(2-y) \ln 2}, & 1 < 2-y < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2(2-y) \ln 2}, & -2 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ -----6 分

2. 随机地取某种炮弹 9 发作试验, 测得炮口速度的样本标准差 $s = 11$ (米/秒)。设炮口速度 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 求这种炮弹的炮口速度的方差的置信水平为 95% 的置信区间。

解: 由于 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 所以 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ -----2 分

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$ -----4 分

由 $1-\alpha = 95\%$, 得 $\alpha = 0.05$ 。再由 $n = 9$, 查表得 $\chi_{0.025}^2(8) = 17.535$, $\chi_{0.975}^2(8) = 2.180$

代入得所求置信区间为 (55.204, 444.037) -----6 分

七、(12 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求: (1) X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$; (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立? (3) $E(X), D(X)$; (4) $\text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 。

解: (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 12y^2 dy = 4x^3, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ ----- 2 分

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 12y^2 dx = 12y^2(1-y), & y \in (0, 1), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$
 ----- 4 分

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立。 ----- 6 分

(3) $E(X) = \int_0^1 dx \int_0^x 12xy^2 dy = \frac{4}{5}$ ----- 7 分

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^1 dx \int_0^x 12x^2 y^2 dy - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}$$
 ----- 8 分

(4) $E(Y) = \int_0^1 dx \int_0^x 12y^3 dy = \frac{3}{5}, E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^x 12xy^3 dy = \frac{1}{2}$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{50}$$
 ----- 10 分

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_0^x 12y^4 dy dx = \frac{2}{5}, D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$
 ----- 12 分

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 从某种试验物中取出 24 个样品, 测量其发热量, 算得平均值 11958, 样本标准差 $s = 316$ 。设发热量服从正态分布。取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 问是否可以认为该试验物发热量的期望值为 12100?

解: $H_0: \mu = \mu_0 = 12100, H_1: \mu \neq 12100$ ----- 1 分

$$H_0 \text{ 成立时, 检验统计量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$
 ----- 2 分

临界值 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(23) = 2.0687$, 拒绝域为 $|t| \geq 2.0687$ ----- 3 分

因 $|t_{\text{观}}| = \frac{12100 - 11958}{316/\sqrt{24}} = 2.2014 > 2.0687$, ----- 5 分

故拒绝 H_0 ，认为该试验物发热量的期望值不是 12100。-----6 分

2. 设 $X \sim U(0,1)$ ， Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$ 且 X 与 Y 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

解： $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ -----1 分

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$ -----3 分

$$= \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \int_0^z e^{-z+x} dx = 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ \int_0^1 e^{-z+x} dx = e^{1-z} - e^{-z}, & z \geq 1. \end{cases}$$
 -----6 分

九、（6 分）某保险公司制定赔偿方案：如果在一年内顾客的投保事件 A 发生，该公司就赔偿顾客 a 元。若已知一年内事件 A 发生的概率为 p ，为使公司收益的期望值等于 a 的 5%，该公司应该要求顾客交纳多少元保险费？

解：设顾客交纳 x 元保险费，公司收益用 Y 表示，则有 $Y = \begin{cases} x, & A \text{ 不发生}, \\ x-a, & A \text{ 发生}. \end{cases}$ -----1 分

据题意， $P\{Y = x\} = P(\bar{A}) = 1 - p$ ， $P\{Y = x - a\} = P(A) = p$ ，-----3 分

从而 $E(Y) = x(1 - p) + (x - a)p = x - ap$ 。-----4 分

又知 $E(Y) = a \cdot 5\%$ ，故 $x = a(p + 5\%)$ 。-----6 分