

参考数据: $z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645, t_{0.05}(23) = 1.7139, t_{0.05}(24) = 1.7109, \chi_{0.05}^2(8) = 15.507,$
 $\chi_{0.025}^2(8) = 17.535, \chi_{0.975}^2(8) = 2.180, t_{0.025}(23) = 2.0687, t_{0.025}(24) = 2.0639$

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 设随机事件 A, B 互不相容, 且有 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则下列关系成立的是 ()。
 (A) A, B 相互独立 (B) A, B 不相互独立 (C) A, B 互为对立事件 (D) A, B 不互为对立事件
2. 设随机变量 $X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2), P_1 = P\{X \leq \mu - 4\}, P_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则 ()。
 (A) 对任意的实数 $\mu, P_1 = P_2$ (B) 对任意的实数 $\mu, P_1 < P_2$
 (C) 只对实数 μ 的个别值, 有 $P_1 = P_2$ (D) 对任意的实数 $\mu, P_1 > P_2$
3. 在下列结论中, () 不是随机变量 X 与 Y 不相关的充分必要条件。
 (A) $E(XY) = E(X)E(Y)$ (B) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
 (C) $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (D) X 与 Y 相互独立
4. 下面关于统计量的说法不正确的是 ()。
 (A) 统计量与总体同分布 (B) 统计量是随机变量
 (C) 统计量是样本的函数 (D) 统计量不含未知参数.
5. 设总体 X 的均值 μ 与方差 σ^2 都存在但未知, 而 X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的样本, 则无论总体 X 服从什么分布, () 是 μ 和 σ^2 的无偏估计量。

- (A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
 (C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. 已知 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.4$, 则 $P(A\bar{B})$ _____。
2. 设 $X \sim N(0, 1), Y = -X - 2$, 则 $Y \sim$ _____。
3. 设 $X \sim B(n, p), E(X) = 6, D(X) = 3.6$, 则 $p =$ _____。
4. 设 $D(X) = 4, D(Y) = 9, \rho_{XY} = -0.5$, 则 $D(3X - Y + 5) =$ _____。
5. 设随机变量 $X \sim t(n) (n > 1), Y = \frac{1}{X^2}$, 则 $Y \sim$ _____。

三、(10 分) 某年级有甲、乙、丙三个班级, 各班的人数分别占年级总人数的 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, 且各班里集邮的人数分别占该班人数的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ 。试求: (1) 从该年级随机选取一名学生, 则此人为集邮者的概率。(2) 从该年级随机选取一名学生, 若发现此人是集邮者, 则此人是甲班的概率。

四、(9 分) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$ 试求: (1)

系数 k ;

(2) $P\{|X| < \frac{1}{2}\}$; (3) X 的分布函数 $F(x)$ 。

五、(9 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 其中 $\theta > -1$ 是未知参

数, X_1, X_2, \dots, X_n 是

来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本, 求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

六、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x \ln 2}, & 1 < x < 4, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ 且 $Y = 2 - X$, 试求 Y 的概率密度。

2. 随机地取某种炮弹 9 发作试验, 测得炮口速度的样本标准差 $s = 11$ (米/秒)。设炮口速度 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 求这种炮弹的炮口速度的方差的置信水平为 95% 的置信区间。

- 七、(12 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 求: (1) X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$; (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立? (3) $E(X), D(X)$; (4) $\text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 。

八、(每题 6 分, 共 12 分)

1. 从某种试验物中取出 24 个样品, 测量其发热量, 算得平均值 11958, 样本标准差 $s = 316$ 。设发热量服从正态分布。取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 问是否可以认为该试验物发热量的期望值为 12100?

2. 设 $X \sim U(0,1)$, Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$ 且 X 与 Y 相互独立, 求 $Z = X + Y$

的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

九、(6分) 某保险公司制定赔偿方案: 如果在一年内顾客的投保事件 A 发生, 该公司就赔偿顾客 a 元。若已知一年内事件 A 发生的概率为 p , 为使公司收益的期望值等于 a 的 5%, 该公司应该要求顾客交纳多少元保险费?