

一、 选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. D 2. A 3. C 4. C 5. B

二、 填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 0.6 ; 2. 1 ; 3. $\frac{9}{2}$; 4. $\frac{1}{3}$; 5. $\frac{1}{n}$ —

三、 计算题（每题 6 分，共 18 分）

1. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 求 $D(X - Y)$.

解: $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 4), \rho_{XY} = -\frac{1}{2}$ 2 分

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 7 \text{4 分}$$

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta > 0 \text{ 为未知参数,}$$

2. 设总体 X 的概率密度函数为
 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的简单随机样本,。求 θ 的最大似然估计量。

解: 似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ 2 分

对数似然函数: $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ 2 分

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \text{1 分}$$

得: $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$, 则 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ 1 分

3. 设某公司的月利润 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 经 16 次抽样得到样本均值为 50.5 (万元), 样本标准差为 1.2 (万元). 求 σ^2 的置信水平为 90% 的置信区间.

解: 已知 $\bar{x} = 50.5, s = 1.2, n = 16, \alpha = 0.1$ 1 分

σ^2 的置信区间为: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$ 3 分

代入数值得置信区间为: $(0.86, 2.97)$ 2 分

四、 (8 分) 玻璃杯成箱出售, 每箱 20 个. 假设每箱含 0, 1, 2 个残次品的概率分别为

0.8, 0.1, 0.1. 一顾客欲买下一箱玻璃杯, 购买时, 售货员随意取出一箱, 而顾客开箱随意

查看其中 4 个, 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 求:

(1) 顾客买下该箱玻璃杯的概率;

(2) 顾客买下的一箱玻璃杯中确实没有残次品的概率.

解: (1) 设 A_0, A_1, A_2 分别表示该箱玻璃杯中的次品数为 0, 1, 2 个, B 表示顾客买下该箱玻璃杯, 则

$$P(A_0) = 0.8, \quad P(A_1) = 0.1, \quad P(A_2) = 0.1,$$

$$P(B|A_0) = 1, \quad P(B|A_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, \quad P(B|A_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由全概率公式得:

$$P(B) = P(A_0)P(B|A_0) + P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= 0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19} \approx 0.94 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

(2) 由贝叶斯公式得:

$$P(A_0|B) = \frac{P(BA_0)}{P(B)} = \frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)} \approx 0.85 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

五、 (8 分) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求 (1) 分布函数 $F(x)$; (2) $Y = X^2$ 的概率密度.

解: (1) 当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$; 当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = \int_0^x e^{-u} du = 1 - e^{-x}$,

$$\text{故分布函数为: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx = 1 - e^{-\sqrt{y}} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{则 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

六、（6分）设 λ 在(0,5)内服从均匀分布，求方程 $x^2 + 2\lambda x + 4\lambda - 3 = 0$ 有实根的概率。

$$\text{解：} \lambda \text{ 的密度函数为：} f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 < \lambda < 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

方程 $x^2 + 2\lambda x + 4\lambda - 3 = 0$ 有实根可表示为： $\Delta = 4\lambda^2 - 4(4\lambda - 3) \geq 0$ ，即
 $(\lambda - 3)(\lambda - 1) \geq 0$ ， $\lambda \geq 3$ 或 $\lambda \leq 1$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

则由 λ 的概率密度可得：

$$P\{\lambda \geq 3\} + P\{\lambda \leq 1\} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

七、（8分）已知成年人每分钟的脉搏次数服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，正常人的脉搏平均值为72次/分，现对12名慢性铅中毒患者脉搏进行测量，经过计算得： $\bar{x} = 68.1, s = 4.6$ ，问慢性铅中毒患者的脉搏次数与正常人是否有显著差异？（ $\alpha = 0.05$ ）。

解：提出假设： $H_0: \mu = 72, H_1: \mu \neq 72 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{选取检验统计量：} t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

拒绝域为： $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

代入数值： $\bar{x} = 68.1, s = 4.6, n = 12, t_{0.025}(11) = 2.20$ ，得 $|t| = 2.937 > t_{0.025}(11)$

故拒绝 H_0 。 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

八、（14分）设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求：(1) 边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$ ；(2) 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立；(3) 随机变

量 $Z = X + Y$ 的概率密度 (4) $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} / X \leq \frac{1}{2}\right\}$

解：

$$(1) \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2x} dy = 2x; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时或 } x \geq 1 \text{ 时, } f_X(x) = 0. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

故

$$\text{当 } 0 < y < 2 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{\frac{y}{2}}^1 dx = 1 - \frac{y}{2}; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } y \leq 0 \text{ 时或 } y \geq 2 \text{ 时, } f_Y(y) = 0. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

故

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, 故随机变量 X 与 Y 不相互独立.....2 分

$$(3) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \begin{cases} \int_{z/3}^z 1 dx & 0 < z < 1, \\ \int_{z/3}^1 1 dx & 1 \leq z < 3, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \begin{cases} z - \frac{z}{3} & 0 < z < 1, \\ 1 - \frac{z}{3} & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$(4) \quad P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\} = \frac{P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

九、(8 分) 设某加工企业生产某种设备的寿命 X (以年计) 服从指数分布, 其密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

厂家规定, 若出售的设备在一年内损坏可以进行免费调换. 厂家每出售一台设备获利 **100** 万元, 而调换一台设备则亏损 **150** 万元, 试问该厂家出售一台设备的平均盈利是多少?

解: 设 Y 表示厂家出售一台设备的盈利, 由题意得:

$$Y = \begin{cases} 100, & X > 1 \\ -150, & 0 \leq X \leq 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由寿命 X 的密度函数得:

$$P\{x > 1\} = \int_1^{+\infty} 0.2e^{-0.2x} dx = e^{-0.2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$P\{0 \leq x \leq 1\} = 1 - e^{-0.2}$$

$$E(Y) = 100e^{-0.2} - 150(1 - e^{-0.2}) = 250e^{-0.2} - 150 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$